SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. CATTABRIGA

COSTRUZIONE DI UNA PARAMETRICE ULTRADISTRIBUZIONE PER IL PROBLEMA DI CAUCHY PER CERTI OPERATORI CON PARTE PRINCIPALE IPERBOLICA. ESISTENZA E PROPAGAZIONE DELLE SINGOLARITA' DELLE SOLUZIONI IN SPAZI DI GEVREY

Bologna, 10 e 17 Maggio 1984 (Redazione definitiva: Dicembre 1984)

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA E RISULTATI PRELIMINARI

Ci proponiamo di studiare il problema di Cauchy

$$(1.1)\quad \begin{cases} P(x,D_t,D_x)u = (D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x,D_x)D_t^j)u(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in R^+ \times \Omega \\ D_t^j u(0,x) = g_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 0,\dots, m-1, \end{cases}$$

ove gli a_j siano assegnati operatori pseudo-differenziali in spazi di Gevrey. Costruiremo una parametrice di tale problema operante su ultra-distribuzioni Gevrey rispetto ad x e mediante essa proveremo risultati di esistenza semiglobale della soluzione del problema in spazi di Gevrey e risultati di propagazione delle singolarità Gevrey di tali soluzioni, in funzione delle singolarità dei dati f e g_j, $j = 0,\dots, m-1$.

Useremo le notazioni abituali nella teoria delle equazioni a derivate parziali, in particolare sarà $D_t = -i\,\partial/\partial_t$, $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,n$, $D_x = (D_1,\dots,D_n)$. Se Ω è un aperto di R^n, K un compatto contenuto in Ω, $c > 0$ e $\sigma > 1$ con $G^{(\sigma),c}(K)$ indicheremo l'insieme di tutte le funzioni $f \in C^\infty(\Omega)$ tali che

$$(1.2)\qquad \|f\|_{K,c} = \sup_{x\in K}\ \sup_{\alpha\in Z_+^n} c^{|\alpha|}\ \alpha!^{\sigma}|D_x^\alpha f(x)| < \infty$$

e porremo

$$G^{(\sigma)}(\Omega) = \bigcap_{K\subset\Omega}\ \bigcup_{c>0} G^{(\sigma),c}(K)$$

$$G_0^{(\sigma)}(\Omega) = \bigcup_{K\subset\Omega}\ \bigcup_{c>0} G_0^{(\sigma),c}(K),$$

con $G_0^{(\sigma),c}(K) = \{f \in G^{(\sigma),c}(K),\ \text{supp}\ f \subset K\}$. Con la norma (1.2) $G_0^{(\sigma),c}(K)$ è uno spazio di Banach. In $G^{(\sigma)}(\Omega)$ considereremo la topologia di limite proiettivo rispetto a $K \to \Omega$ degli spazi $G^{(\sigma)}(K)$, limiti induttivi per $c \to +\infty$ degli spazi $G^{(\sigma),c}(K)$ ed in $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ la topologia di limite induttivo rispetto a $K \to \Omega$ degli spazi $G_0^{(\sigma)}(K)$ limiti induttivi rispetto a $c \to +\infty$ degli spazi $G_0^{(\sigma),c}(K)$.

Indicheremo poi con $G_0^{(\sigma)'}(\Omega)$ e $G^{(\sigma)'}(\Omega)$ gli spazi duali di $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ e $G^{(\sigma)}(\Omega)$ rispettivamente. Essi sono anche chiamati spazi di ultradistribuzioni di Gevrey di ordine σ [1]. E' noto che $G^{(\sigma)'}(\Omega)$ si può identificare con il sottospazio di $G_0^{(\sigma)'}(\Omega)$ delle ultradistribuzioni di ordine σ con supporto compatto.

Supporremo che *gli operatori* $a_j(x,D_x)$ *in* (1.1) *siano operatori pseudodifferenziali definiti da*

$$(1.3) \qquad a_j(x,D_x)u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, a_j(x,\xi)\, \tilde{u}(\xi)d\xi \quad , \ u \in G_0^{(\sigma)}(\Omega),$$

$j = 0,\dots, m-1$, ove $\tilde{u}$ indica la trasformata di Fourier di u e le funzioni $a_j(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times R^n)$ sono tali che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono costanti positive $C_a(K)$, $A_a(K)$, $B(K)$ tali che per ogni $x \in K$, $\alpha, \beta \in Z_+^n$, $\xi \in R^n$, $|\xi| \geq B(K)|\alpha|^\sigma$ riesce

$$(1.4) \qquad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_j(x,\xi)| \leq C_a(K)\, A_a(K)^{|\alpha+\beta|}\alpha!\ \beta!^\sigma\ (1+|\xi|)^{m_j-|\alpha|} \quad {}^{2)}$$

---

1) Gli spazi di funzioni ed ultradistribuzioni qui considerati sono stati studiati da vari autori. Per una loro presentazione in un quadro più generale si veda H. Komatsu [5] e [6].

2) Si veda [2] e [3]. Come si vede immediatamente gli operatori $a_j(x,D_x)$ si possono considerare anche come appartenenti alla classe $OPS_{1,0}^{\infty,\sigma}(\Omega)$ considerata in [13].

per degli $m_j > 0$ tali che $\max_{j=0,\dots,m-1} m_j/(m-j) = p \in]0,1]$ e $\sigma \in]1,1/p[$.

Si può provare[3] che gli operatori $a_j(x,D_x)$ definiti da (1.3) sono continui da $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ in $G^{(\sigma)}(\Omega)$ e si possono prolungare come operatori continui da $G^{(\sigma)'}(\Omega)$ a $G_0^{(\sigma)'}(\Omega)$.

Supporremo inoltre che *gli operatori* $a_j(x,D_x)$ *definiti da* (1.3) *siano propri*, ossia che i loro nuclei siano ultradistribuzioni in $G_0^{(\sigma)'}(\Omega \times \Omega)$ il cui supporto abbia intersezione compatta con tutti gli insiemi $H \times \Omega$ ed $\Omega \times H$ con H compatto di Ω.

Ciò implica che gli operatori $a_j(x,D_x)$ sono pure continui da $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ a $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$, da $G^{(\sigma)}(\Omega)$ a $G^{(\sigma)}(\Omega)$, da $G^{(\sigma)'}(\Omega)$ a $G^{(\sigma)'}(\Omega)$ e da $G_0^{(\sigma)'}(\Omega)$ a $G_0^{(\sigma)'}(\Omega)$.

Per ottenere una soluzione del problema (1.1) costruiamo una parametrice del problema espressa mediante una famiglia, dipendente da $t \in \bar{R}^+$, di operatori pseudo-differenziali di ordine infinito della classe $OPS_{1,0}^{\infty,\sigma}(\Omega)$ definita e studiata da L. Zanghirati nel seminario precedente [13][4]. Mediante tale parametrice potremo anche ottenere un risultato riguardante il supporto singolare delle soluzioni del problema (1.1) rispetto alla regolarità Gevrey. Per costruire la parametrice che ci interessa ci serviremo delle definizioni e dei risultati di [13] a cui senz'altro rinviamo. In particolare utilizzeremo i seguenti risultati che si desumono dai Teoremi 2, 20 e 22 di [13] [5].

---

[3] Per le proprietà degli operatori $a_j(x,D_x)$ indicate qui di seguito si veda per es. [2], [3] e [13].

[4] Si veda anche [14] ove è pure studiato il problema (1.1) quando gli operatori a_j non dipendono da x.

[5] Per le dimostrazioni di tali teoremi si veda [14], Teoremi 2.4 e 2.30 e Proposizione 2.25.

Proposizione 1.1. Se $A(t) \in OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$, $t \in \bar{R}^+$, ha simbolo $a(t,x,\xi) \in C(\bar{R}^+; S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$, allora l'operatore definito da

$$(A(t)u)(x) = \int_0^t A(t-s,x,D_x)u(s,\cdot)ds \qquad u \in C(\bar{R}^+;G^{(\sigma)}_0(\Omega)),$$

applica $C(\bar{R}^+;G^{(\sigma)}_0(\Omega))$ in $C(\bar{R}^+;G^{(\sigma)}(\Omega))$ e si prolunga in un operatore che applica $C(\bar{R}^+;G^{(\sigma)'}(\Omega))$ in $C(\bar{R}^+;G^{(\sigma)'}_0(\Omega))$.

Proposizione 1.2. Se $A(t) \in OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$, $t \in \bar{R}^+$, ha simbolo $a(t,x,\xi) \in C(\bar{R}^+; S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$, esiste un operatore $B(t) \in OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ $t \in \bar{R}^+$, tale che $b(t,x,\xi) \in C(\bar{R}^+;S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$, $b(t,x,\xi) \sim \sum_{h\geq 0} \sum_{|\alpha|=h} (\alpha!)^{-1} \partial^\alpha_\xi D^\alpha_x a(t,x,-\xi)$[6] uniformemente sui compatti di $\bar{R}^+$ e ${}^tA(t) - B(t) = S(t)$, ove $S(t)$, $t \in \bar{R}^+$, è un operatore σ-regolarizzante con nucleo $S(t,x,y) \in C(\bar{R}^+;G^{(\sigma)}(\Omega\times\Omega))$.

Teorema 1.3. Per ogni $t \in \bar{R}^+$ siano $P(t)$, $Q(t) \in OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ il primo dei quali proprio, con simboli $p(t,x,\xi)$, $q(t,x,\xi) \in C(\bar{R}^+; S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$ e $q(t,x,\xi) \sim \sum_{h\geq 0} q_h(t,x,\xi)$, $q_h(t,x,\xi) \in C(\bar{R}^+;S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$, in $SF^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ uniformemente sui compatti di $\bar{R}^+$. Allora per ogni $t \in \bar{R}^+$ è $P(t)\, Q(t) = T(t) + R(t)$, ove $T(t) \in OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$, con simbolo $T(t,x,\xi) \in C(\bar{R}^+; S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$ tale che $T(t,x,\xi) \sim \sum_{h\geq 0} T_h(t,x,\xi)$ in $SF^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ uniformemente sui compatti di R^+, con $T_h(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|+k=h} \alpha!^{-1} \partial^\alpha_\xi p(t,x,\xi) D^\alpha_x q_k(t,x,\xi) \in C(\bar{R}^+; S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$ ed $R(t)$ è un

---

6) Per la definizione di questa relazione di equivalenza si veda [13], Definizioni 7 e 8

operatore σ-regolarizzante, ossia un operatore lineare e continuo da $G^{(\sigma)'}(\Omega)$ a $G^{(\sigma)}(\Omega)$ il cui nucleo $R(t,x,y) \in C(\bar{R}^+; G^{\sigma}(\Omega \times \Omega))$.

2. COSTRUZIONE DI UNA PARAMETRICE DEL PROBLEMA

Per costruire una parametrice del problema (1.1) cerchiamo una funzione $E(t)$ definita in $\bar{R}^+$ con valori in $OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ assieme alle sue derivate (rispetto a t) fino all'ordine m[7] e tale che

$$(2.1)\begin{cases} P(x,D_t,D_x)E(t,x,D_x) = (D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x,D_x))D_t^j E(t,x,D_x) = R(t), \quad t \in R^+ \\ D_t^j E(0,x,D_x) = 0 \quad , \quad j = 0,\dots,m-2 \, , \\ D_t^{m-1} E(0,x,D_x) = i\, I \, , \end{cases}$$

con $R(t)$ operatore σ-regolarizzante per ogni $t \in R^+$ ed I operatore identità. Se imponiamo che

$$E(t,x,\xi) \sim \sum_{h\geq 0} E_h(t,x,\xi) \quad , \quad t \in \bar{R}^+,$$

in $SF^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ con $E_h(t,x,\xi) \in C^{\infty}(\bar{R}^+ \times \Omega \times R^n)$, per il Teorema 1.3 il pri

---

7) Se $E(t)$ è definita da

$$(E(t)u)(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} E(t,x,\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi, \; u \in G_0^{(\sigma)}(\Omega),$$

intenderemo che $D_t^j E(t)$ sia definita da

$$(D_t^j E(t)u)(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} D_t^j E(t,x,\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi.$$

mo membro della prima equazione in (2.1) sarà per ogni $t \in R^+$ eguale a $T(t) + R(t)$, con $R(t)$ σ-regolarizzante ed $T(t,x,D_x) \in OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ tale che $T(t,x,\xi) \sim \sum_{h \geq 0} T_h(t,x,\xi)$ in $SF^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ uniformemente sui compatti di $\bar{R}^+$ e

$$(2.2) \qquad T_h(t,x,\xi) = D_t^m E_h(t,x,\xi) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+k=h} \alpha!^{-1} \partial_\xi^\alpha a_j(x,\xi) D_x^\alpha D_t^j E_k(t,x,\xi).$$

La prima equazione in (2.1) sarà quindi soddisfatta se costruiamo i simboli $E_h(t,x,\xi)$ in modo che sia $T_h(t,x,\xi) \equiv 0$ per ogni $h \geq 0$. La funzione $E_o(t,x,\xi)$ deve quindi anzitutto essere per ogni $x \in \Omega$ e $\xi \in R^n$ soluzione del problema di Cauchy in $\bar{R}^+$:

$$(2.3) \quad \begin{cases} (D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x,\xi) D_t^j) E_o(t,x,\xi) = 0 \quad , \quad t \in R^+, \ x \in \Omega, \ \xi \in R^n \\ D_t^j E_o(0,x,\xi) = 0 \quad , \quad j = 0,\dots,m-2 , \\ D_t^{m-1} E_o(0,x,\xi) = i \quad . \end{cases}$$

Vale il seguente

Lemma 2.1[8]. Sia $a = (a_o,\dots,a_{m-1}) \in C^m$. La soluzione $E_o(a,t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j D_t^j) E_o(a,t) = 0 \quad , \quad t \in R \quad , \\ D_t^j E_o(a,0) = 0 \quad , \quad j = 0,\dots,m-2 , \\ D_t^{m-1} E_o(a,0) = i \ , \end{cases}$$

8) Si utilizza il risultato di [11], 3.9.

può essere prolungata a valori complessi di t; essa diviene così una funzione intera di $(a,t) \in C^{m+1}$ tale che

$$|D_t^h E_o(a,t)| \leq \frac{|t|^{m-h-1}}{(m-h-1)!} \exp\left(|t| \sum_{j=0}^{m-1} |a_j|^{1/(m-j)}\right)$$

se $h = 0,\dots,m-1$ e

$$|D_t^{m+h} E_o(a,t)| \leq \left(\sum_{j=0}^{m-1} |a_j|^{1/(m-j)}\right)^{h+1} \exp\left(|t| \sum_{j=0}^{m-1} |a_j|^{1/(m-j)}\right)$$

se $h = 0,1,\dots$

Esistono inoltre due costanti positive C e c tali che per ogni $\gamma \in Z_+^m$

$$|D_a^\gamma E_o(a,t)| \leq C^{|\gamma|+1} \gamma! \frac{|t|^{m-1+\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j (m-j)}}{\left(m-1+\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j (m-j)\right)!} .$$

$$\cdot \exp\left(c|t| \sum_{j=0}^{m-1} |a_j|^{1/(m-j)}\right) .$$

Fondandosi su questo lemma si prova che la soluzione $E_o(t,x,\xi)$ del problema (2.3) appartiene a $C^\infty(\bar{R}^+ \times \Omega \times R^n)$ e per ogni $t \in \bar{R}^+$, $j = 0,\dots,m$, $D_t^j E_o(t,x,\xi) \in S_{1,0}^{\infty,\sigma}(\Omega)$. Precisamente si prova il

Lemma 2.2. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono due costanti positive $C_o(K)$ ed $A_o(K)$ tali che per ogni $\alpha, \beta \in Z_+^n$ e $k = 0,\dots,m-1$, e per ogni $x \in K$, $\xi \in R^n$, $t \in R^+$, per la soluzione

$E_o(t,x,\xi)$ del problema (2.3) valgono le maggiorazioni

$$(2.4)\quad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^k E_o(t,x,\xi)| \leq \frac{t^{m-k-1}}{(m-k-1)!} C_o(K) A_o(K)^{|\alpha+\beta|} \alpha!\ \beta!^\sigma (1+|\xi|)^{-|\alpha|}.$$

$$\cdot \exp (c_o t(1+|\xi|)^p) \quad ,$$

e per $h = 0,1,\ldots$

$$(2.5)\quad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^{m+h} E_o(t,x,\xi)| \leq C_o(K) A_o(K)^{|\alpha+\beta|} \alpha!\ \beta!^\sigma (1+|\xi|)^{p(h+1)-|\alpha|} .$$

$$\cdot \exp (c_o t(1+|\xi|^p)$$

ove c_o è una costante maggiore di uno indipendente da K.

Affinché tutte le T_h, $h \geq 1$, date da (2.2) siano identicamente nulle e tenuto conto delle condizioni iniziali in (2.1) e (2.3), deve essere per ogni $h \geq 1$

$$(2.6)\quad \begin{cases} (D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x,\xi) D_t^j) E_h = - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{h} \sum_{|\alpha|=\ell} \alpha!^{-1} \partial_\xi^\alpha a_j(x,\xi) D_x^\alpha D_t^j E_{h-\ell} \\ D_t^j E_h(0,x,\xi) = 0 \quad , \quad j = 0,\ldots,m-1. \end{cases}$$

Posto

$$(2.7)\quad F_h(t,x,\xi) = - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{h} \sum_{|\alpha|=\ell} \alpha!^{-1} \partial_\xi^\alpha a_j(x,\xi) D_x^\alpha D_t^j E_{h-\ell}(t,x,\xi) \quad , h=1,\ldots$$

e tenuto conto che $E_o(t,x,\xi)$ è soluzione di (2.3), le E_h saranno definite

induttivamente da

(2.8) $$E_h(t,x,\xi) = \int_0^t E_o(t-s,x,\xi)\, F_h(s,x,\xi)ds \quad , \quad h \geq 1.$$

E' poi

$$D_t^j\, E_h(t,x,\xi) = \int_0^t D_t^j\, E_o(t-s,x,\xi)\, F_h(s,x,\xi)ds \quad , \; j = 0,\dots,m-1 \; ,$$

e

$$D_t^m\, E_h(t,x,\xi) = F_h(t,x,\xi) + \int_0^t D_t^m\, E_o(t-s,x,\xi)\, F_h(s,x,\xi)\, ds \; .$$

E' ovvio che $E_h(t,x,\xi) \in C^\infty(\bar{R}^+ \times \Omega \times R^n)$, $h \geq 1$. Proveremo che per ogni $t \in \bar{R}^+$, $j = 0,\dots,m$, $D_t^j\, E(t,x,\xi) \in S_{1,0}^{\infty,\sigma}\,(\Omega)$ e che $\sum_{h\geq 0} D_t^j\, E_h$ sono serie formali nel senso della Definizione 7 di [13]. Si utilizza il seguente

Lemma 2.3[9]. Sia $\sigma \geq 1$ e siano a, $b \in C^\infty(\Omega \times R^n)$ tali che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistano delle costanti positive $C_a(K)$, $C_b(K)$, $A(K)$, $k \geq 2$, r_1, r_2, s_1, $s_2 \geq 0$ tali che se $x \in K$, $\xi \in R^n$, $\alpha, \beta \in Z_+^n$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta\, a(x,\xi)| \leq C_a(K)(r_1+|\alpha|)!(r_2+|\beta|)!^\sigma (A(K)/(1+|\xi|))^{r_1+|\alpha|}\, A(K)^{r_2+|\beta|} \quad ,$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta\, b(x,\xi)| \leq C_b(K)(s_1+|\alpha|)!(s_2+|\beta|)!^\sigma (kA(K)/(1+|\xi|))^{s_1+|\alpha|} (kA(K))^{s_2+|\beta|} \quad ,$$

allora per $x \in K$, $\xi \in R^n$, $\alpha, \beta \in Z_+^n$ è

---

9) Si veda [10], Lemma 2.1.

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta (a\,b)(x,\xi)| \leq C_a(K)\, C_b(K) (r_1+s_1+|\alpha|)!(r_2+s_2+|\beta|)!^\sigma (kA(K)/(1+|\xi|))^{r_1+s_1+|\alpha|} \cdot$$

$$\cdot\, (kA(K))^{r_2+s_2+|\beta|}\; 4\, k^{-r_1-r_2} \frac{r_1!s_1!}{(r_1+s_1)!} \cdot \Big(\frac{r_2!\,s_2!}{(r_2+s_2)!}\Big)^\sigma .$$

Con l'aiuto di questo lemma si prova per induzione il

Lemma 2.4. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono costanti positive $C_0(K)$, $A(K)$, $B(K)$ tali che, per ogni $\alpha, \beta \in Z_+^n$, $x \in K$, $t \in \bar{R}^+$, $\xi \in R^n$ con $|\xi| > B(K)(h+|\alpha|)^\sigma$, per le E_h, $h \geq 1$, definite da (2.8) è

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^j E_h(t,x,\xi)| \leq C_0(K)^{h+1} (A(K)/(1+|\xi|))^{h+|\alpha|} A(K)^{h+|\beta|}\; h!^{-1} \cdot$$

$$\cdot (h+|\alpha|)!\; (h+|\beta|)!^\sigma \exp(c_0 t(1+|\xi|)^p) \sum_{i=1}^{hm} \frac{t^{i+m-1-j}}{(i+m-1-j)!}\; (1+|\xi|)^{pi},$$

$j = 0,\dots,m-1$, e

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^m E_h(t,x,\xi)| \leq C_0(K)^{h+1} (A(K)/(1+|\xi|))^{h+|\alpha|}\; A(K)^{h+|\beta|}\; h!^{-1} (h+|\alpha|)! \cdot$$

$$\cdot\, (h+|\beta|)!^\sigma\; (1+|\xi|)^p \exp(c_0 t(1+|\xi|)^p) \sum_{i=1}^{hm} \frac{t^i}{i!}\; (1+|\xi|)^{pi} ,$$

ove c_0 è una costante maggiore di uno indipendente da K.

Da questo lemma e del Lemma 2.2, tenuto conto che $p \in]0, 1/\sigma[$, si trae subito il

Corollario 2.5. La funzione E_0 del Lemma 2.2 e le funzioni E_h, $h \geq 1$, definite dalla (2.8) sono in $C^\infty(\bar{R}^+ \times \Omega \times R^n)$ e sono tali che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono due costanti positive $C(K)$ e $B(K)$ e per

ogni $\varepsilon > 0$ una costante positiva $c_\varepsilon(t,K)$ tali che per ogni $x \in K$, $t \in \bar{R}^+$, α, $\beta \in Z_+^n$, $\xi \in R^n$ con $|\xi| > B(K)(h+|\alpha|)^\sigma$ è

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^j E_0(t,x,\xi)| \leq c_\varepsilon(t,K) \frac{t^{m-j-1}}{(m-j-1)!} C(K)^{|\alpha+\beta|} (1+|\xi|)^{-|\alpha|} \cdot$$

$$\cdot\ \alpha!\ \beta!^\sigma \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\sigma}),$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^j E_h(t,x,\xi)| \leq c_\varepsilon(t,K) \frac{t^{m-j}}{(m-j)!} C(K)^{h+|\alpha+\beta|} (1+|\xi|)^{-h-|\alpha|} \alpha!(h!\beta!)^\sigma \cdot$$

$$\cdot\ \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\sigma})$$

$h \geq 1$, $j = 0,\dots,m-1$, e

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^m E_0(t,x,\xi)| \leq c_\varepsilon(t,K) C(K)^{|\alpha+\beta|} \alpha!\ \beta!^\sigma (1+|\xi|)^{-|\alpha|} \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\sigma}),$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^m E_h(t,x,\xi)| \leq c_\varepsilon(t,K) t\ C(K)^{h+|\alpha+\beta|} (1+|\xi|)^{-h-|\alpha|} \alpha!(h!\beta!)^\sigma \cdot$$

$$\cdot\ \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\sigma})$$

$h \geq 1$, ove $c_\varepsilon(t,K)$ è limitata sui compatti di $\bar{R}^+$.

Per la Definizione 7 di [13] questo corollario prova il

Lemma 2.6. La funzione E_0 e le E_h, $h \geq 1$ definite da (2.8) sono tali che per ogni $t \in \bar{R}^+$, $\sum_{h \geq 0} D_t^j E_h(t,x,\xi) \in SF_{1,0}^{\infty,\sigma}(\Omega)$, $j = 0,\dots,m$, uniformemente sui compatti di $\bar{R}^+$. Con tale scelta delle E_h tutte le funzioni T_h, $h \geq 0$, a primo membro di (2.2) sono identicamente nulle. E' inoltre $E_h \in C^\infty(\bar{R}^+ \times \Omega \times R^n)$, $h \geq 0$ e $D_t^j E_h(0,x,\xi) = 0$, $j = 0,\dots,m$, per

ogni $h \geqq 1$.

Il Teorema 10 di [13] ed il Teorema 1.3 assicurano allora che

Teorema 2.7. Esiste $E(t,x,\xi) \in C^{\infty}(\bar{R}^{+} \times \Omega \times R^{n})$ tale che per ogni $j = 0,\dots,m$ $D_t^j\, E(t) \in S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$, uniformemente sui compatti di $\bar{R}^{+}$, onde $D_t^j\, E(t) \in C(\bar{R}^{+};\, S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$, $j = 0,\dots,m-1$. Inoltre l'operatore $E(t,x,D_x)$ definito da

$$(2.9) \qquad (E(t)u)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\, E(t,x,\xi)\, \tilde{u}\,(\xi)\, d\xi\ , \quad u \in G_0^{(\sigma)}(\Omega),$$

soddisfa alle (2.1) con $R(t)$ operatore σ-regolarizzante con nucleo $R(t,x,y) \in C(\bar{R}^{+};\, G^{(\sigma)}(\Omega \times \Omega))$ ed $R(0) = 0$.

Tenuto conto che anche gli operatori ${}^{t}a_j\ (x, D_x)$, $j = 0,\dots,m-1$, trasposti degli operatori $a_j(x,D_x)$, sono propri, come il Teorema 2.7 si prova

Teorema 2.7'. Esiste $H(t,x,\xi) \in C^{\infty}(\bar{R}^{+} \times \Omega \times R^{n})$ tale che per ogni $j = 0,\dots,m$, $D_t^j\, H(t) \in S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$, uniformemente sui compatti di $\bar{R}^{+}$, onde $D_t^j\, H(t) \in C(\bar{R}^{+};\, S^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega))$, $j = 0,\dots,m-1$. Inoltre l'operatore $H(t,x,D_x)$ definito da

$$(2.9') \qquad (H(t)u)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\, H(t,x,\xi)\, \tilde{u}(\xi)\, d\xi, \quad u \in G_0^{(\sigma)}(\Omega),$$

è tale che

$$(2.1') \begin{cases} (D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} {}^t a_j(x,D_x)\, D_t^j)\, H(t) = S(t) \;, \\ D_t^j\, H(0) = 0 \quad , \; j = 0,\dots,m-2 \;, \\ D_t^{m-1}\, H(0) = iI \;, \end{cases}$$

ove $S(t)$ è un operatore σ-regolarizzante con nucleo $S(t,x,y) \in C(\bar{R}^+ : G^{(\sigma)}(\Omega \times \Omega))$ ed $S(0) = 0$

3. PROPAGAZIONE DELLE SINGOLARITA' DELLE SOLUZIONI DEL PROBLEMA

Sia $H(t)$ l'operatore definito da (2.9'), indicato nel Teorema 2.7' e soddisfacente a (2.1') e sia ${}^tH(t)$ il suo trasposto. Per la Proposizione 20 di [13] esiste per ogni $t \in \bar{R}^+$ un operatore $Q(t) \in OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$ tale che $D_t^j\, Q(t) \in OPS^{\infty,\sigma}_{1,0}(\Omega)$, $j = 1,\dots,m$ e ${}^tH(t) - Q(t)$ è un operatore σ-regolarizzante, con tutte le sue derivate rispetto a t fino all'ordine m. Inoltre $D_t^j\, Q(0) = 0, j=0\dots,m-2$, e $D_t^{m-1} Q(0) = iI$. Ne segue che

$$D_t^m\, Q(t) + \sum_{j=0}^{m-1} D_t^j\, Q(t)\, a_j(x,D_x) = D_t^m\, {}^tH(t) + \sum_{j=0}^{m-1} D_t^j\, {}^tH(t)\, a_j(x,D_x) + R(t) =$$

$$= {}^t(D_t^m\, H(t)) + \sum_{j=0}^{m-1} {}^t(D_t^j\, H(t))\, a_j(x,D_x) + R(t) = {}^t(D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} {}^t a_j(x,D_x) D_t^j) H(t) +$$

$$+ R(t) = {}^tS(t) + R(t)$$

ove $R(t)$ è un operatore σ-regolarizzante ed $S(t)$ è l'operatore σ-regolarizzante così indicato in (2.1').

L'operatore $Q(t)$ può essere utilizzato per costruire una parametrice sinistra del problema (1.1). Infatti se $u(t,x) \in C^m(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)}(\Omega))$, essendo gli operatori a_j propri, è $P(x,D_t,D_x)u \in C(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)}(\Omega))$ e quindi se $D_t^j u(0,x)= 0$, $j = 0,\dots,m-1$,

$$\int_0^t Q(t-s)\, P(x,D_s,D_x)\, u(s,\cdot)ds= u(t,x) +$$

$$+\int_0^t (D_t^m Q(t-s) + \sum_{j=0}^{m-1} D_t^j Q(t-s)a_j)\, u(s,\cdot)ds = u(t,x) +\int_0^t R'(t-s)u(s,\cdot)ds$$

ove per ogni $t \in \bar{R}^+$, $R'(t)$ è un operatore σ-regolarizzante con nucleo $R'(t,x,y) \in C(\bar{R}^+; G^{(\sigma)}(\Omega \times \Omega))$.

Se poi $u \in C^m(\bar{R}^+; G^{(\sigma)'}(\Omega))$ e $D_t^j u(0,x) = 0, j = 0,\dots,m-1$, per ogni $\phi \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ è

$$(3.1)\quad \langle u(t,x),\phi\rangle = \int_0^t \langle Q(t-s)P(x,D_s,D_x)u(s,\cdot),\phi\rangle ds - \int_0^t \langle R'(t-s)u(s,\cdot),\phi\rangle ds.$$

D'altra parte, per la σ-pseudo-località di $Q(t)$[10], se U è un aperto contenuto in Ω tale che $Pu(s,\cdot) \in G^{(\sigma)}(U)$, allora è $Q(t-s)Pu(s,\cdot) \in G^{(\sigma)}(U)$ se $s \leq t$. Da (3.1) segue allora che

$$u(t,\cdot) \in G^{(\sigma)}\left(\overbrace{\left(\bigcap_{0\leq s\leq t} \sigma\text{-sing supp } Pu(s,\cdot)\right)}^{\circ}\right),$$

ossia che

---

[10] Si veda il Teorema 6 di [13].

$$\sigma\text{-sing supp } u(t,\cdot) \subset \overline{\bigcup_{0\le s\le t} \sigma\text{-sing supp } Pu(s,\cdot)} \quad ,$$

ove σ-sing supp v indica l'intersezione di tutti i chiusi di Ω al di fuori di quali v appartiene a $G^{(\sigma)}$.

Se u non soddisfa alle condizioni per $t = 0$ indicate sopra, si considera la funzione

$$v(t,x) = u(t,x) - \sum_{j=0}^{m-1} t^j D_t^j u(0,x)$$

la quale soddisfa evidentemente a tali condizioni.

Possiamo dunque concludere che

Teorema 3.1. Se $u \in C^m(\bar{R}^+;\ G^{(\sigma)'}(\Omega))$ e P è l'operatore considerato nel problema (1.1), allora per ogni $t \in R^+$ è

$$\sigma\text{-sing supp } u(t,\cdot) \subset (\overline{\bigcup_{0\le s\le t} \sigma\text{-sing supp } (Pu)(s,\cdot)}) \cup (\sum_{j=0}^{m-1} \sigma\text{-sing supp } D_t^j u(0,\cdot)).$$

Sia ora $u \in C^m(R^+;\ G^{(\sigma)'}(\Omega)) \cap C^{m-1}(\bar{R}^+;\ G^{(\sigma)'}(\Omega))$ soluzione del problema (1.1) con $f = g_j = 0$, $j = 0,\dots,m-1$. Dalla (3.1) segue allora che

$$u(t,x) = -\int_0^t R'(t-s)u(s,\cdot)\, ds \ .$$

Essendo $R'(t-s)$ un operatore σ-regolarizzante, ciò implica che $u(t,\cdot) \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ e dunque che

$$(3.2) \quad u(t,x) = -\int_0^t R'(t-s,x,y)u(s,y)dy, \quad R'(t,x,y) \in C(\bar{R}^+;\ G^{(\sigma)}(\Omega\times\Omega)).$$

Per la ipotesi fatta su u esiste $\Omega' \subset\subset \Omega$ tale che $\mathrm{supp}\, u(s,\cdot) \subset \Omega'$ per ogni $s \in]0,t]$. Se C è tale che

$$|R'(s,x,y)| \leq C \quad , (s,x,y) \in [0,t] \times \bar{\Omega}' \times \bar{\Omega}'$$

si ha allora

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}'} |u(t,x)| \leq C\, t' \sup_{(s,y) \in [0,t] \times \bar{\Omega}'} |u(s,y)| \qquad t' \in [0,t]$$

e quindi, posto $M = \sup_{(s,y) \in [0,T] \times \bar{\Omega}'} |u(s,y)|$, applicando successivamente (3.2)

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}'} |u(t,x)| \leq M\, C^h\, t^h/h! \quad , \ h = 1,2,\ldots$$

da cui segue che $u(t,x) \equiv 0$ per $x \in \bar{\Omega}'$. E' provato così il seguente teorema di unicità.

Teorema 3.2. Esiste al più una sola soluzione del problema (1.1.), appartenente a $C^m(R^+; G^{(\sigma)'}(\Omega)) \cap C^{m-1}(\bar{R}^+; G^{(\sigma)'}(\Omega))$.

4. ESISTENZA SEMIGLOBALE DI SOLUZIONI REGOLARI

Sia ora $g \in C(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)}(\Omega))$. Posto

$$(4.17 \qquad u(t,x) = \int_0^t E(t-s)\, g(s,\cdot)\, ds =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_0^t ds \int_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} E(t-s,x,\xi) \tilde{g}(s,\xi)\, d\xi \ ,$$

per la Proposizione 1.1 ed il Teorema 2.7 è $u \in C^{m-1}(\bar{R}^+; G^{(\sigma)}(\Omega))$ ed inoltre

$$P(x,D_t,D_x)u = g(t,x) + \int_0^t R(t-s)g(s,\cdot)\, ds =$$

$$= g(t,x) + \int_0^t ds \int R(t-s,x,y)g(s,y)dy = g(t,x) + (Rg)(t,x) \ ,$$

$$D_t^j u(0,x) = 0 \quad , \quad j = 0,\ldots,m-1.$$

Pertanto se vogliamo che la funzione u definita da (4.1) sia soluzione del problema (1.1) la funzione g dovrà soddisfare alla

$$(4.2) \qquad g(t,x) + (Rg)(t,x) = f(t,x) \quad , \quad (t,x) \in \bar{R}^+ \times \Omega \quad ,$$

ove $R(t,x,y)$ ha le proprietà indicate nel Teorema 2.7.

Supponiamo anzitutto che $f \in C(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)}(\Omega))$. Sia H un compatto contenuto in Ω e $T > 0$. Esiste $\Omega' \subset\subset \Omega$ ed una costante $c_f > 0$ tali che $\Omega' \supset H$ e $f(t,\cdot)$ è limitata in $G_0^{(\sigma),c_f}(\bar{\Omega}')$ per $t \in [0,T]$.

Le proprietà del nucleo R assicurano che esiste una costante $c_r > 0$ tale che $R(s,x,y)|_{[0,T]\times\bar{\Omega}'\times\bar{\Omega}'}$ è limitata in $G^{(\sigma),c_r}(\bar{\Omega}'\times\bar{\Omega}')$. Sia allora $\chi \in G_0^{(\sigma),c_r/2}(\bar{\Omega}')$ e $\chi \equiv 1$ su H. Un risultato analogo a quello del Lemma 2.3[11]) assicura allora che se scegliamo $c_f \geq 2\, c_r$, la funzione $R(t-s,x,y)\chi(x)f(s,y)$ è limitata in $G^{(\sigma),c_f}(\bar{\Omega}' \times \bar{\Omega}')$ per $t \in [0,T]$, $s \in [0,t]$ e pertanto posto

---

11) Si ponga Ω in luogo di R^n ed $y \in \bar{\Omega}'$ in luogo di $\xi \in R^n$ ed inoltre $r_1 = r_2 = s_1 = s_2 = 0$ ed $|\alpha|!^\sigma$ in luogo di $|\alpha|!$.

$$(R_\chi f)(t,x) = \int_0^t ds \int R(t-s,x,y)\chi(x)f(s,y)dy \qquad t \in [0,T] ,$$

è $(R_\chi f) \in C([0,T]; G_0^{(\sigma), c_f}(\bar{\Omega}'))$ ed esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|(R_\chi f)(t,\cdot)\|_{\bar{\Omega}', c_f} \leq M\, t \sup_{0 \leq s \leq T} \|f(s,\cdot)\|_{\bar{\Omega}', c_f} , \quad t \in [0,T] .$$

Ne segue che per $t \in [0,T]$

$$\|(R_\chi^\nu f)(t,\cdot)\|_{\bar{\Omega}', c_f} \leq \frac{(M\, t)^\nu}{\nu!} \sup_{0 \leq s \leq T} \|f(s,\cdot)\|_{\bar{\Omega}', c_f} \qquad \nu \in N .$$

La serie di Neumann $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (R_\chi^\nu f)(t,x)$ è dunque convergente in $G_0^{(\sigma), c_f}(\bar{\Omega}')$ uniformemente rispetto a $t \in [0,T]$ e la sua somma $g(t,x)$ appartiene a $C([0,T]; G_0^{\sigma, c_f}(\bar{\Omega}'))$ ed è tale che

$$g(t,x) + (R_\chi g)(t,x) = f(t,x) , \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega$$

e quindi soddisfa (3.2) per $(t,x) \in [0,T] \times H$.

La funzione (4.1) è dunque soluzione del problema (1.1) in $[0,T] \times H$. Ciò prova il seguente risultato di risolubilità semiglobale del problema (1.1).

<u>Teorema</u> 4.1. Se $f \in C(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)}(\Omega))$, allora per ogni compatto $H \subset \Omega$ e per ogni $T > 0$ esiste $u \in C^{m-1}(\bar{R}^+; G^{(\sigma)}(\Omega))$ soluzione del problema (1.1) con $g_j = 0, j = 0,\dots,m-1$, in $[0,T] \times H$.

<u>Corollario</u> 4.2. Se $f \in C(\bar{R}^+; G^{(\sigma)}(\Omega))$ e $g_j \in G^{(\sigma)}(\Omega)$, $j = 0,\dots,m-1$, allora per ogni compatto $H \subset \Omega$ ed ogni $T > 0$ esiste $u \in C^{m-1}(\bar{R}^+; G^{(\sigma)}(\Omega))$ soluzione del problema (1.1) in $[0,T] \times H$.

Basterà infatti porre $u = v + \sum_{j=0}^{m-1} t^j g_j(x)$ con v tale che

$$\begin{cases} (Pv(t,\cdot))(x) = f(t,x) - (P \sum_{j=0}^{m-1} t^j g_j)(x) = F(t,x) \\ D_t^j\, v(0,x) = 0\,, \quad j = 0,\dots,m-1\,, \end{cases}$$

e scelta $\phi \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ tale che $\phi \equiv 1$ su H, applicare il Teorema precedente con ϕF in luogo di f.

5. ESISTENZA SEMIGLOBALE DI SOLUZIONI ULTRADISTRIBUZIONI

Sia ora $g \in C(\bar{R}^+; G^{(\sigma)'}(\Omega))$ e per $\phi \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$

$$\langle \int_0^t E(t-s)g(s,\cdot)ds,\ \phi\rangle = \int_0^t \langle E(t-s)g(s,\cdot),\phi\rangle\, ds =$$

$$= \int_0^t ds\ (2\pi)^{-n} \int \tilde{g}(s,\xi)d\xi \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\ E(t-s,x,\xi)\phi(x)dx.$$

Per le proprietà dell'operatore E(t) indicate nel Teorema 2.7, la funzione

$$\bar{R}^+ \ni t \to \langle \int_0^t E(t-s)g(s,\cdot)ds,\ \phi\rangle \quad , \quad \phi \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$$

è continua in $\bar{R}^+$ con tutte le sue derivate fino all'ordine m-1 ed è

$$\langle D_t^j \int_0^t E(t-s)g(s,\cdot)ds,\phi\rangle = \int_0^t \langle D_t^j\, E(t-s)g(s,\cdot),\ \phi\ \rangle\, ds =$$

$$= \langle \int_0^t D_t^j\, E(t-s)g(s,\cdot)ds,\ \phi\rangle \quad , \quad j = 0,\dots,m-1$$

e

$$\langle D_t^m \int_0^t E(t-s)g(s,\cdot)ds, \phi \rangle = \langle g(t,\cdot), \phi \rangle +$$

$$+\langle \int_0^t D_t^m E(t-s)g(s,\cdot)ds, \phi \rangle.$$

Da queste, ricordando che gli operatori $a_j(x,D_x)$, $j = 0,\dots,m-1$, sono propri e quindi applicano, come pure i loro trasporti, $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ in $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$, segue che se P è l'operatore in (1.1) e $\phi \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ è

$$\langle P(x,D_t,D_x)\int_0^t E(t-s)g(s,\cdot)ds, \phi\rangle = \langle g(t,\cdot), \phi\rangle +$$

$$+\int_0^t \langle P(x,D_t,D_x)\, E(t-s)g(s,\cdot), \phi \rangle\, ds = \langle g(t,\cdot) + \int_0^t R(t-s)g(s)ds, \phi \rangle,$$

ove R(t) è l'operatore così indicato nel Teorema 2.7.

Se $f \in C(\bar{R}^+; G^{(\sigma)'}(\Omega))$, H è un compatto contenuto in Ω e $T > 0$ esiste un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ tale che $H \supset \Omega'$ e supp $f(t,\cdot) \subset \Omega'$ per ogni $t \in [0,T]$, inoltre l'applicazione $t \to \langle f(t,\cdot), \phi\rangle$, continua in $\bar{R}^+$ per ogni $\phi = G^{(\sigma)}(\Omega)$, è limitata su ogni $G^{(\sigma),c}(\bar{\Omega}')$, $c > 0$, uniformemente in $[0,T]$.

Se $\phi \in G^{(\sigma)}(\Omega)$, con le stesse notazioni del numero precedente è allora

$$|\langle D_x^\alpha (\chi(x) R(t-s)f(s,\cdot)), \phi\rangle| = |\langle f(s,\cdot), \int D_x^\alpha (\chi(x)R(t-s,x,\cdot))\phi(x)dx\rangle| \leq$$

$$\leq c\, \alpha!^\sigma \quad c_{\bar{r}}^{|\alpha|} \sup_{\bar{\Omega}'} |\phi| \quad , \quad 0 \leq t \leq T \ , \ 0 \leq s \leq t, \quad \alpha \in Z_+^n \ ,$$

con c costante positva indipendente da α, t, s, ϕ. Da ciò segue che la funzione

$$(R_\chi f)(t,x) = \int_0^t \chi(x)\, R(t-s)\, f(s,\cdot)\, ds,$$

appartenente a $C(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)}(\Omega))$, è limitata in $G_0^{(\sigma)}; \, {}^{c}r(\bar{\Omega}')$, uniformemente in $[0,T]$. Ragionando come nel numero precedente si prova allora che la serie di Neumann $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (R_\chi^\nu f)(t,x)$ è convergente in $G_0^{(\sigma)}, {}^{c}r(\bar{\Omega}')$ uniformemente su $[0,T]$. Come nel numero precedente ciò consente di provare che

<u>Teorema</u> 5.1. Se $f \in C(\bar{R}^+; G^{(\sigma)'}(\Omega))$, allora per ogni compatto $H \subset \Omega$ ed ogni $T > 0$ esiste $u \in C^{m-1}(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)'}(\Omega))$ soluzione del problema (1.1) con $g_j = 0$, $j = 0,\dots,m-1$, in $[0,T] \times H$.

<u>Corollario</u> 5.2. Se $f \in C(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)'}(\Omega))$ e $g_j \in G_0^{(\sigma)'}(\Omega)$, allora per ogni compatto $H \subset \Omega$ ed ogni $T > 0$ esiste $u \in C^{m-1}(\bar{R}^+; G_0^{(\sigma)'}(\Omega))$ soluzione del problema (1.1) in $[0,T] \times H$.

6. OSSERVAZIONI FINALI

Una versione microlocale del Teorema 3.1, per operatori P con parte principale iperbolica di molteplicità costante e quando $Pu \in C([0,T]; G_0^{(\sigma)}(R^n))$ è stato provato con altri metodi da S. Mizohata [9].

Quando gli operatori $a_j(x,D_x)$, $j = 0,\dots,m-1$, che figurano nell'operatore P qui considerato sono operatori differenziali lineari, dai risultati di esistenza semiglobale provati nei nn. 3 e 4 si traggono risultati di esistenza della soluzione del problema (1.1) in $R^+ \times \Omega$, poi

ché in tal caso vale un teorema di unicità per la soluzione stessa. Tali risultati sono in questo caso contenuti in teoremi di esistenza ed unicità per la soluzione del problema di Cauchy in spazi di Gevrey per operatori con parte principale iperbolica provati da vari autori. Se $\sigma \in]1, m/(m-1)[$ da M.D. Bronstein [1] e precedentemente, se $\Omega = R^n$ ed f, g_j, $j = 0,\dots,m-1$, appartengono a G^σ, da Y. Ohya [10], senza impor-re alcuna condizione per i termini di P di ordine minore di m. Se $\sigma\ ]1,1/p[$, $p \in]0,1[$, da H. Komatsu [7][12] e V. Ja. Ivrii [4]. Sempre nel caso in cui l'operatore P qui considerato sia un operatore differen-ziale il risultato del Teorema 3.1 è in particolare contenuto nei risul-tati provati da S. Wakabayashi [12] per operatori con parte principale iperbolica con coefficienti costanti.

Il caso in cui gli operatori a_j, $h = 0,\dots,m-1$, non dipenda-no da x è studiato in [14], ove si prova in tal caso una versione micro-locale del Teorema 3.1.

---

12) Si veda anche J. Leray-Y. Ohya [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] M.D. BRONSTEIN, Il problema di Cauchy, per operatori iperbolici con caratteristiche di molteplicità variabile, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 41 (1980), 83-99 = Trans. Moscov Math. Soc. 1982, 57-103.

[2] S. HASHIMOTO, Y. MORIMOTO, T. MATSUZAWA, Opérateurs pseudodifférentiels et classes de Gevrey, Comm. Partial Differential Equations, 8(1983), 1277-1289.

[3] V. IFTIMIE, Opérateurs hypoelliptiques dans des espaces de Gevrey, Bull. Math. Soc. Sci Math. R.S. Roumanie 27(75) (1983), 317-333.

[4] V. Ja. IVRII, Condizioni di correttezze in classi di Gevrey del problema di Cauchy per operatori non strettamente iperbolici, Sibirsk. Mat. Z. 17 (1976), 547-563 = Siberian Math. J. 17 (1976), 422-435.

[5] H. KOMATSU, Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 20 (1973), 25-105.

[6] H. KOMATSU, Ultradistributions II. The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24(1977), 607-628.

[7] H. KOMATSU, Linear hyperbolic equations with Gevrey coefficients, J. Math. pures et appl. 59(1980), 145-185.

[8] J. LERAY, Y. OHYA, Systémes linéaires, hyperboliques non-stricts, Colloque C.B.R. M., 1964, 105-144.

[9] S. MIZOHATA, Propagation de la regularité au sens de Gevrey pour les opérateurs differentiels à multiplicité constante, Equations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes, Séminaire J. Vaillant 1982-83, 106-133, Hermann, Parigi, 1984.

[10] Y. OHYA, Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple. J. Math. Soc. Japan 16(1964), 268-286.

[11] F. TREVES, Linear Partial Differential Equations with constant coefficients, Gordon and Breach, New York, 1966.

[12] S. WAKABAYASHI, The Cauchy problem for operators with constant coefficient hyperbolic principal part and propagation of singularities, Japan J. Math. 6(1980), 179-228.

[13] L. ZANGHIRATI, Operatori pseudo-differentiali di tipo Gevrey di ordine infinito, Seminario di Analisi Matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, 3 maggio 1984, in questo volume.

[14] L. ZANGHIRATI, Pseudodifferential operators of infinite order and Gevrey classes, in corso di stampa.